ИНСТИТУТ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК И ЭКОЛОГИИ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ по курсу: ФИЗИКА – ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Автор: доцент Барабанов Алексей Леонидович

ПОТОК И ЦИРКУЛЯЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Потоком векторного поля $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ через поверхность S называется следующая величина:

$$\int\limits_S \mathbf{A}(\mathbf{r})d\boldsymbol{\sigma} = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{A}(\mathbf{r}_i)\Delta\boldsymbol{\sigma}_i.$$

Здесь $\Delta\boldsymbol{\sigma}_i$ есть малый направленный элемент поверхности S, включающий в себя точку $\mathbf{r}_i$; вектор $\Delta\boldsymbol{\sigma}_i$ нормален к поверхности S в точке $\mathbf{r}_i$, а его модуль $|\Delta\boldsymbol{\sigma}_i| = \Delta\sigma_i$ равен площади элемента поверхности.

Линейным интегралом векторного поля $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ вдоль контура C называется следующая величина:

$$\int\limits_C \mathbf{A}(\mathbf{r})d\mathbf{l} = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{A}(\mathbf{r}_i)\Delta\mathbf{l}_i.$$

Здесь $\Delta\mathbf{l}_i$ есть малый направленный элемент контура C, включающий в себя точку $\mathbf{r}_i$; вектор $\Delta\mathbf{l}_i$ касателен к контуру C в точке $\mathbf{r}_i$, а его модуль $|\Delta\mathbf{l}_i| = \Delta l_i$ равен длине элемента контура.

Циркуляцией Γ векторного поля $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ вдоль замкнутого контура C называется линейный интеграл:

$$\Gamma = \oint\limits_C \mathbf{A}(\mathbf{r})d\mathbf{l}.$$

ПОСТОЯННОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Пусть в точках $\mathbf{r}_i$ покоятся заряды q_i $(i = 1, 2\ldots)$. Потенциальная энергия пробного заряда q, находящегося в точке $\mathbf{r}$, есть:

$$U = k_e\sum_i\frac{q\,q_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}.$$

Сила $\mathbf{F}$ (сила Кулона), действующая на пробный заряд, есть:

$$\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla}U = k_e\sum_i\frac{q\,q_i\,(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}.$$

Потенциал электрического поля в точке $\mathbf{r}$, создаваемого покоящимися зарядами, есть:

$$\varphi = \frac{U}{q} = k_e\sum_i\frac{q_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}.$$

Напряженность электрического поля есть:

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi = k_e\sum_i\frac{q_i\,(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}.$$

Линейный интеграл напряженности постоянного электрического поля от точки 1 до точки 2 не зависит от контура интегрирования и определяется убылью потенциала:

$$\int\limits_1^2 \mathbf{E}d\mathbf{l} = \varphi(1) - \varphi(2).$$

Потенциал и напряженность электрического поля, создаваемого зарядом, распределенным непрерывно с плотностью $\rho(\mathbf{r})$, определяется формулами:

$$\varphi(\mathbf{r}) = k_e \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV',$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k_e \int \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} dV'.$$

ЕДИНИЦЫ ГС ИЗМЕРЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

В гауссовской системе (ГС) единица измерения заряда 1 СГСЭ$_q$ по определению такова, что

$$\frac{(1\ \text{СГСЭ}_q)^2}{(1\ \text{см})^2} = 1\ \text{дин},$$

поэтому:

$$k_e^{\text{гс}} = 1.$$

Единица измерения электрического потенциала есть:

$$1\ \text{СГСЭ}_V \equiv \frac{1\ \text{эрг}}{1\ \text{СГСЭ}_q} = \frac{1\ \text{СГСЭ}_q}{1\ \text{см}} = (1\ \text{дин})^{1/2}.$$

Единица измерения напряженности электрического поля есть 1 СГСЭ$_V$/см.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ

Пусть по замкнутым тонким проводам C_1 и C_2 текут постоянные токи I_1 и I_2. Сила $d\mathbf{F}_1$, действующая на элемент $d\mathbf{l}_1$ 1-го провода, находящегося в точке $\mathbf{r}_1$, со стороны всего второго провода, есть:

$$d\mathbf{F}_1 = k_m I_1 I_2 \oint\limits_{C_2} \frac{[d\mathbf{l}_1 \times [d\mathbf{l}_2 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)]\,]}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^3}.$$

В частности, сила dF_1 (сила Ампера), действующая на элемент dl_1 бесконечно длинного прямого 1-го провода со стороны всего бесконечно длинного 2-го провода, параллельного 1-му, равна

$$\frac{dF_1}{dl_1} = k_m \frac{2 I_1 I_2}{\rho},$$

где ρ – расстояние между проводами.

ЕДИНИЦЫ СИ ИЗМЕРЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

В СИ единица измерения заряда 1 Кл по определению такова, что

$$\frac{2\,(1\ \text{Кл/сек})^2}{1\ \text{м}} = \frac{2{\cdot}10^{-7}\ \text{Н}}{1\ \text{м}},$$

поэтому:

$$k_m^{\text{си}} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\ \frac{\text{Н}}{\text{А}^2},$$

где 1 А=1 Кл/1 сек.

Единицы измерения заряда 1 СГСЭ$_q$ и 1 Кл связаны следующим образом:

$$1\ \text{Кл} = 2.9979\ldots \cdot 10^9\ \text{СГСЭ}_q \simeq 3\cdot 10^9\ \text{СГСЭ}_q.$$

Соответственно:

$$k_e^{\text{си}} \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \simeq 9\cdot 10^9\ \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2}, \qquad k_m^{\text{гс}} = \frac{1}{c^2}, \quad c = 299\,792\,458\ \frac{\text{м}}{\text{сек}} \simeq 3\cdot 10^{10}\ \frac{\text{см}}{\text{сек}}.$$

В СИ единица измерения электрического потенциала есть:

$$1\ \text{В} \equiv \frac{1\ \text{Дж}}{1\ \text{Кл}} \simeq \frac{1}{300}\ \text{СГСЭ}_V.$$

Единица измерения напряженности электрического поля есть 1 В/м.

В любой системе единиц справедливо:

$$\frac{k_e}{k_m} = c^2.$$

ПОСТОЯННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Индукция $\mathbf{B}$ магнитного поля в точке $\mathbf{r}$, создаваемого постоянным током I_2, текущим по замкнутому контуру C_2, равна (закон Био–Савара–Лапласа)

$$\mathbf{B} = k_B I_2 \oint\limits_{C_2} \frac{[d\mathbf{l}_2 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3}.$$

Элемент $d\mathbf{l}$ постоянного тока I в точке $\mathbf{r}$ испытывает действие силы $d\mathbf{F}$ (силы Ампера) со стороны магнитного поля:

$$d\mathbf{F} = k_F I [d\mathbf{l} \times \mathbf{B}].$$

При этом:

$$k_F k_B \equiv k_m.$$

Заряд q, движущийся со скоростью $\mathbf{v}$, в точке $\mathbf{r}$ испытывает действие силы $\mathbf{F}$ (силы Лоренца) со стороны магнитного поля:

$$\mathbf{F} = k_F q [\mathbf{v} \times \mathbf{B}].$$

ЕДИНИЦЫ ГС И СИ ИЗМЕРЕНИЯ МАГНИТНЫХ ВЕЛИЧИН

В ГС принимают:

$$k_F^{\text{ГС}} = k_B^{\text{ГС}} = \frac{1}{c}.$$

В ГС единица измерения индукции магнитного поля,

$$1\ \text{Гс} = \frac{1\ \text{дин}}{1\ \text{СГСЭ}_q} = 1\ \frac{\text{СГСЭ}_V}{\text{см}},$$

совпадает с единицей измерения напряженности электрического поля.

В СИ принимают:

$$k_F^{\text{СИ}} = 1, \qquad k_B^{\text{СИ}} = k_m^{\text{СИ}}.$$

В СИ единица измерения индукции магнитного поля,

$$1\ \text{Тл} = \frac{1\ \text{Н}}{1\ \text{А} \cdot 1\ \text{м}} = 10^4\ \text{Гс},$$

отличается размерностью от единицы измерения напряженности электрического поля.

ДИВЕРГЕНЦИЯ И РОТОР ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Дивергенцией векторного поля $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ называется следующая скалярная функция:

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint\limits_{\Delta S} \mathbf{A} d\boldsymbol{\sigma}}{\Delta V}.$$

Здесь замкнутая поверхность ΔS охватывает малый объем ΔV, который включает в себя точку $\mathbf{r}$. Теорема Остроградского–Гаусса:

$$\oint\limits_S \mathbf{A}(\mathbf{r})d\boldsymbol{\sigma} = \int\limits_V \operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r})dV,$$

где S есть замкнутая поверхность, охватывающая объем V.

Ротором векторного поля $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ называется такая векторная функция $\operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r})$, что:

$$\operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{n} = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\oint\limits_{\Delta C}\mathbf{A}d\mathbf{l}}{\Delta\sigma}.$$

Здесь замкнутый контур ΔC ограничивает малую поверхность $\Delta\sigma$, которая включает в себя точку $\mathbf{r}$, а $\mathbf{n}$ есть единичный вектор нормали к поверхности $\Delta\sigma$. Теорема Стокса:

$$\oint\limits_C \mathbf{A}(\mathbf{r})d\mathbf{l} = \int\limits_S \operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r})d\boldsymbol{\sigma},$$

где C есть замкнутый контур, ограничивающий поверхность S.

Дивергенция и ротор векторного поля

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_x(\mathbf{r})\mathbf{e}_x + A_y(\mathbf{r})\mathbf{e}_y + A_z(\mathbf{r})\mathbf{e}_z$$

вычисляются по формулам:

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\nabla}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\partial A_x(\mathbf{r})}{\partial x} + \frac{\partial A_y(\mathbf{r})}{\partial x} + \frac{\partial A_z(\mathbf{r})}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = [\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}(\mathbf{r})] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x(\mathbf{r}) & A_y(\mathbf{r}) & A_z(\mathbf{r}) \end{vmatrix}.$$

ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Закон Гаусса для постоянного электрического поля в интегральной форме:

$$\oint\limits_S \mathbf{E}d\boldsymbol{\sigma} = 4\pi k_e \sum_i q_i.$$

Закон Гаусса для постоянного электрического поля в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi k_e \rho(\mathbf{r}).$$

Закон о циркуляции постоянного электрического поля в интегральной форме:

$$\oint\limits_C \mathbf{E}d\mathbf{l} = 0.$$

Закон о циркуляции постоянного электрического поля в дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0.$$

Уравнение Пуассона:

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -4\pi k_e \rho(\mathbf{r}).$$

ЕМКОСТИ. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Емкость уединенного проводника с зарядом q и потенциалом φ ($\varphi \to 0$ при $r \to \infty$) есть:

$$C = \frac{q}{\varphi}.$$

В ГС единица измерения емкости есть 1 см=1 СГСЭ$_q$/1 СГСЭ$_V$, а в СИ – 1 Ф=1 Кл/1 В$\simeq 9{\cdot}10^{11}$ см.

Пусть имеются N проводников с зарядами q_i ($i = 1, 2 \ldots N$). Потенциалы проводников определяются формулами:

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{N} S_{ij} q_j.$$

Величины S_{ij} называются потенциальными коэффициентами. Обратные соотношения имеют вид:

$$q_i = \sum_{j=1}^{N} C_{ij} \varphi_j,$$

где C_{ij} – емкостные коэффициенты ($C = S^{-1}$, $S = C^{-1}$). Теорема взаимности:

$$S_{ij} = S_{ji}, \qquad C_{ij} = C_{ji}.$$

Плотность энергии электрического поля есть:

$$w_e = \frac{E^2}{8\pi k_e}.$$

ПОСТОЯННЫЕ ТОКИ

В ГС единица измерения силы тока есть 1 СГСЭ$_q$/сек, а в СИ – 1 А$\simeq 3 \cdot 10^9$ СГСЭ$_q$/сек. Уравнение непрерывности электрического тока имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

Закон Ома для однородного участка цепи:

$$I = \frac{U}{R},$$

где R есть сопротивление. В СИ единица измерения сопротивления есть 1 Ом = 1 В/1 А, а в ГС – 1 сек/см $\simeq 9 \cdot 10^{11}$ Ом. Сопротивление однородного проводника длины l и поперечного сечения S есть:

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

где ρ – удельное сопротивление.

Локальная форма закона Ома:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E},$$

где $\sigma = 1/\rho$ есть удельная электрическая проводимость. В СИ величина, обратная 1 Ом, есть 1 См (Симменс). В СИ единица измерения удельной электрической проводимости есть 1 См/м, а в ГС – 1 сек$^{-1} \simeq (1/9) \cdot 10^{-9}$ См/м.

Локальная форма обобщенного закона Ома:

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*),$$

где $\mathbf{E}^*$ есть напряженность сторонних сил. ЭДС, действующая на участке цепи, равна

$$\varepsilon_{12} = \int_1^2 \mathbf{E}^* d\mathbf{l}.$$

Первое правило Кирхгофа для постоянных токов:

$$\sum_i I_i = 0.$$

Второе правило Кихгофа для постоянных токов:

$$\sum_i I_i R_i = \sum_k \varepsilon_k.$$

Закон Джоуля–Ленца для неоднородного участка цепи:

$$\frac{dQ}{dt} = RI^2.$$

Локальная форма закона Джоуля–Ленца:

$$\frac{dQ_{\text{уд}}}{dt} = \rho j^2 = \mathbf{j}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*).$$

КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРОВОДИМОСТИ

Пусть в веществе имеются свободные носители заряда i-го сорта с концентрацией n_i, массой m_i, зарядом q_i. Тогда классическая теория проводимости приводит к следующему выражению для электропроводности вещества:

$$\sigma = \sum_i \frac{n_i q_i^2 \tau_i}{2m_i},$$

где τ_i есть характерное время свободного пробега носителя заряда. Это время может быть взято равным отношению,

$$\tau_i = \frac{\lambda_i}{v_i},$$

характерной длины свободного пробега λ_i и характерной скорости v_i.

Закон Фарадея для электролиза:

$$M = \frac{\mu}{\nu F} Q,$$

где M есть масса вещества, которое выделяется на электроде при пропускании через электролит заряда Q, μ – молярная масса выделяющегося вещества, ν – валентность ионов выделяющегося вещества, и

$$F = N_A e = 96487\, \frac{\text{Кл}}{\text{моль}}$$

есть постоянная Фарадея.

Эмпирический закон Видемана–Франца:

$$\frac{\text{æ}}{\sigma} = CT,$$

где æ и σ – коэффиценты теплопроводности и электропроводности металла, T есть абсолютная температура, а коэффициент C примерно одинаков для всех металлов. В классической теории проводимости коэффициент C определяется формулой Друде:

$$C = 3\left(\frac{k_B}{e}\right)^2 = 3\left(\frac{R}{F}\right)^2.$$

ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Закон Гаусса для постоянного магнитного поля в интегральной форме:

$$\oint_S \mathbf{B}\, d\boldsymbol{\sigma} = 0.$$

Закон Гаусса для постоянного магнитного поля в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0.$$

Закон о циркуляции магнитного поля в интегральной форме:

$$\oint\limits_C \mathbf{B}d\mathbf{l} = 4\pi k_B \sum_i I_i.$$

Закон о циркуляции магнитного поля в дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 4\pi k_B\, \mathbf{j}(\mathbf{r}).$$

Эффект Холла состоит в появлении разности потенциалов $\Delta\varphi$ между верхней и нижней сторонами пластины толщины l, помещенной в поперечное магнитное поле B, при протекании по пластине тока плотности j. При этом:

$$\Delta\varphi = \left(\frac{k_F}{nq}\right) jBl,$$

где n – концентрация носителей свободных зарядов в пластине, а q – заряд одного носителя.

ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Индукция магнитного поля выражается через векторный потенциал следующим образом:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}).$$

Градиентная (калибровочная) инвариантность:

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{B}'(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}).$$

Кулоновское калибровочное условие:

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0.$$

Уравнение для векторного потенциала, удовлетворяющего кулоновской калибровке:

$$\Delta\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 4\pi k_B \mathbf{j}(\mathbf{r}).$$

Частное решение этого уравнения:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = k_B \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'.$$

Случай тонкого провода:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = k_B I \int \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

Закон электромагнитной индукции:

$$\varepsilon_i = -k_F \frac{d\Phi}{dt}, \qquad \Phi = \int\limits_S \mathbf{B}d\boldsymbol{\sigma}.$$

В СИ единица измерения магнитного потока (Φ) 1 Вб = 1 Тл$\cdot$ 1 м^2 = 1 В$\cdot$ 1 сек, а в ГС – 1 Мкс = 1 Гс$\cdot$ 1 см^2 = 1 СГСЭ$_V\cdot$ 1 см = 10^{-8} Вб.

Первая пара уравнений Максвелла:

$$\operatorname{div}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -k_F \frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t}.$$

Вторая пара уравнений Максвелла:

$$\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 4\pi k_e \rho(\mathbf{r},t), \qquad \operatorname{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 4\pi k_B \mathbf{j}(\mathbf{r},t) + \frac{k_B}{k_e}\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t}.$$

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Явный вид уравнений Максвелла в ГС ($k_e = 1$, $k_F = k_B = 1/c$):

$$\begin{cases} \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot}\mathbf{B} = \dfrac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{cases}$$

Явный вид уравнений Максвелла в СИ ($k_e = 1/4\pi\varepsilon_0$, $k_F = 1$, $k_B = \mu_0/4\pi$):

$$\begin{cases} \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{div}\mathbf{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \dfrac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mathbf{j} + \varepsilon_0\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{cases}$$

Волновое уравнение для вектора напряженности электрического поля:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} - \Delta\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 0.$$