

# ИНСТИТУТ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК И ЭКОЛОГИИ

## ЗАДАЧИ по курсу:

### ФИЗИКА – ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Автор: доцент Барабанов Алексей Леонидович

#### Задание 1. Стационарное электрическое поле

1.1 (БКФ, т.2, 1.3) Груз с массой  $m = 10$  г подвесили к двум одинаковым воздушным шарикам, наполненным гелием. Каждый шарик соединён с грузом нитью длиной  $l = 120$  см. Шарик несёт одинаковый электрический заряд  $Q$ . Найдите  $Q$  в единицах СГСЭ $_q$ , если известно, что вся система парит в воздухе в равновесии, а расстояние между шарами (центрами шаров) равно  $L = 70$  см.

1.2 (БКФ, т.2, 1.6) Альфа-частица проходит с большой скоростью через геометрический центр молекулы водорода  $H_2$ , двигаясь по линии, перпендикулярной к оси, проведённой через протоны. Расстояние между протонами равно  $b$ . На каком участке пути альфа-частица испытывает действие наибольшей силы? Протоны мало смещаются за время прохождения альфа-частицы. Электрическим полем электронов в молекуле пренебрегите (это не очень хорошее приближение, так как в центральной части молекулы  $H_2$  имеется значительная концентрация отрицательного заряда).

1.3 (БКФ, т.2, 1.15) Нейтральный атом водорода в нормальном состоянии ведёт себя в некотором отношении как точечный заряд  $+e_0$ , окружённый облаком отрицательного заряда, плотность которого даётся выражением  $\rho(r) = Ce^{-2r/a}$ . Здесь  $a = 0.53 \cdot 10^{-8}$  см – "боровский радиус", а  $C$  – постоянная, величина которой выбирается так, чтобы общий отрицательный заряд был в точности равен  $-e_0$ . Чему равен полный электрический заряд  $q$  внутри сферы радиусом  $a$ ? Какова величина электрического поля на таком расстоянии от ядра (в единицах СГСЭ $_V$ /см и В/м)?

1.4 (БКФ, т.2, 1.17) Точечный заряд  $q$  расположен: (а) в центре куба, (б) в одной из вершин куба. Чему равен поток вектора  $\mathbf{E}$  через каждую из граней куба?

1.5 (БКФ, т.2, 1.19) На поверхности бесконечно большой плоскости имеется равномерное распределение заряда с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Справа от плоскости (непосредственно примыкая к плоскости) и параллельно ей расположен бесконечно большой слой заряда толщины  $d$  с однородной объёмной плотностью заряда  $\rho$ . Определите напряжённость  $\vec{E}$  и потенциал  $\varphi$  во всём пространстве. Нарисуйте графики. Проверьте, что потенциал  $\varphi$  удовлетворяет уравнению Пуассона в слое и вне слоя.

1.6 (БКФ, т.2, 1.22) Рассмотрите сферическое распределение заряда с однородной плотностью  $\rho$  при  $r \leq R$  (однородно заряженный шар). Определите напряжённость  $\vec{E}$  и потенциал  $\varphi$  во всём пространстве. Нарисуйте графики. Проверьте, что потенциал  $\varphi$  удовлетворяет уравнению Пуассона внутри и вне шара.

1.7 (БКФ, т.2, 2.3) Небольшая сфера радиуса  $r$  концентрична большой сфере радиуса  $R$ . По поверхностям сфер равномерно распределены заряды  $q$  и  $Q$ , соответственно. Вычислите разность потенциалов сфер. Обратите внимание на то, что если заряд  $q$  положительный, то потенциал внутренней сферы будет всегда выше, чем потенциал наружной сферы. Таким образом, если сферы соединить проводом, то заряд  $q$  полностью перейдёт на наружную сферу, независимо от величины заряда  $Q$ .

1.8 (Иродов "Задачи", 1997, 2.26) Две скрещивающиеся взаимно перпендикулярные нити бесконечной длины заряжены равномерно с линейной плотностью  $\lambda$ . Найдите силу взаимодействия нитей.

1.9 Заряд распределен равномерно с плотностью  $\rho$  по объему бесконечного цилиндра радиуса  $R$ . Считая, что ось  $z$  совпадает с осью цилиндра, определите составляющие  $E_x(x, y, z)$ ,  $E_y(x, y, z)$  и  $E_z(x, y, z)$  напряженности электрического поля как внутри ( $\rho < R$ ), так и вне ( $\rho > R$ ) цилиндра ( $\rho$  – расстояние до оси  $z$ ). Проверьте справедливость соотношения  $\text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi k_e \rho(\mathbf{r})$ . Найдите потенциал  $\varphi$  во всем пространстве.

1.10 (БКФ, т.2, 2.13) Начертите силовые линии векторного поля  $\vec{A} = -y\vec{e}_x + x\vec{e}_y$  в плоскости  $(x, y)$ . Вычислите  $\text{rot } \vec{A}$ . Вычислите линейный интеграл  $\oint \vec{A} d\vec{l}$  по замкнутой кривой  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$ .

Покажите, что теорема Стокса верна, вычислив поток  $\text{rot } \vec{A}$  через поверхность, ограниченную этой кривой.

1.11 (БКФ, т.2, 2.14) Вычислите дивергенцию и ротор поля  $\vec{E} = (2y, 2x + 3z, 3y)$ . Если поле потенциально, то определите потенциал  $\varphi$  этого поля.

1.12 (Иродов "Задачи", 1997, 2.55) Является ли электрическое поле  $\vec{E} = 2axy\vec{e}_x + a(x^2 - y^2)\vec{e}_y$ , где  $a$  – постоянная величина, потенциальным? Если да, то найдите потенциал  $\varphi$  этого электрического поля. Попробуйте нарисовать на плоскости  $(x, y)$  силовые и эквипотенциальные линии.

## Задание 2. Проводники в электрическом поле

2.1 (БКФ, т.2, 2.9) Вычислите электростатическую энергию системы, состоящей из четырёх электронов по углам тетраэдра со стороной, равной  $a = 1$  А, в центре которого находится протон. Что вы можете сказать о результирующей силе, действующей на один из электронов, если известен знак энергии?

2.2 (БКФ, т.2, 2.10) Две одинаковые сферы радиусом  $r$  разделены расстоянием  $d \gg r$ . Заряд  $Q$  распределён по поверхности сфер. (а) Определите потенциальную энергию системы, если на каждую сферу поместить заряд  $Q/2$ . (б) Определите потенциальную энергию, если весь заряд распределён по поверхности одной сферы, а на другой его нет. (в) Определите электрические потенциалы на каждой сфере в случаях (а) и (б). (г) Если соединить сферы в случае (б) тонким проводом так, чтобы заряд мог перетекать от одной сферы к другой, то какова будет окончательная конфигурация заряда? Что можно сказать о сохранении энергии?

2.3 (БКФ, т.2, 1.9, 1.10) В начале 20-го столетия существовала гипотеза чисто электростатического происхождения энергии покоя электрона. Представьте себе электрон в виде шара радиусом  $r_0$  с однородной объёмной плотностью заряда. Найдите  $r_0$ , приравняв энергию шара энергии покоя электрона  $mc^2$ . *Замечание:* у этой модели имеется дефект - не предусмотрено ничего, что могло бы скрепить заряд!

2.4 (БКФ, т.2, 3.5) Проследим за силовой линией, которая выходит из точечного заряда, висящего на высоте  $h$  над бесконечной проводящей плоскостью, в горизонтальном направлении, т.е. параллельно плоскости. Где эта линия пересечёт поверхность проводника? Для решения задачи вам понадобится закон Гаусса и простое интегрирование.

2.5 (Иродов "Задачи", 1997, 2.64) Точечный заряд  $q = 2.00$  мкКл находится между двумя проводящими взаимно перпендикулярными полуплоскостями. Расстояние от заряда до каждой полуплоскости  $l = 5.0$  см. Найдите модуль силы, действующей на заряд.

2.6 (Иродов "Задачи", 1997, 2.74) Четыре большие металлические пластины расположены на малом расстоянии  $d$  друг от друга. Внешние пластины (1 и 4) соединены проводником, а на внутренние пластины (2 и 3) подана разность потенциалов  $\Delta\varphi$ . Найдите: (а) напряженность электрического поля между пластинами 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4; (б) суммарный заряд на единицу площади каждой пластины.

2.7 (Иродов "Задачи", 1997, 2.76) Две проводящие плоскости 1 и 2 расположены на расстоянии  $l$  друг от друга. Между ними на расстоянии  $x$  от плоскости 1 находится точечный заряд  $q$ . Найдите заряды, наведенные на каждой из плоскостей.

2.8 (Овчинкин и др. "Задачи", 2000, вариант 2.20) Заряд  $q$  находится на расстоянии  $R$  от центра металлического шара радиуса  $a$  ( $R > a$ ). Определите поверхностную плотность заряда на шаре (в зависимости от угла  $\theta$ , отсчитываемого от направления на заряд), полный заряд шара и силу притяжения заряда  $q$  к шару в двух случаях: (а) шар заземлен, (б) шар изолирован и электронейтрален.

## Задание 3. Электрический ток

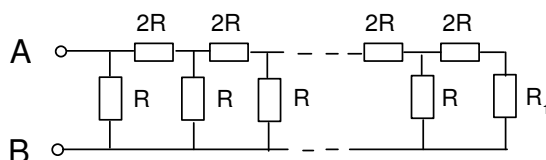
3.1 (БКФ, т.2, 4.1) Электроны движутся в кольцевом ускорителе по круговой орбите длиной 240 м. Во время цикла ускорения на этой орбите обращается примерно  $10^{11}$  электронов. Скорость электронов практически равняется скорости света. Чему равен ток (в амперах)? *Пояснение.* Мы приводим эту задачу, чтобы подчеркнуть, что в определении тока вовсе не требуется, чтобы носители заряда были нерелятивистскими, и, кроме того, не существует правила, запрещающего считать, для вклада в ток, данную заряженную частицу много раз в секунду.

3.2 (БКФ, т.2, 4.3) В электростатическом генераторе Ван де Граафа прорезиненная лента шириной  $l = 30$  см движется со скоростью  $v = 20$  м/сек. Ленте сообщается поверхностный заряд, причем поверхностная плотность заряда настолько велика, что создает по обеим сторонам ленты поле в  $E = 40$  ГГСЭВ/см. Чему равен ток  $I$  (в миллиамперах)?

3.3 (БКФ, т.2, вариант 4.6) Контейнер, наполненный кислородом при комнатной температуре и нормальном давлении, освещается пучком рентгеновских лучей, которые ионизируют небольшую часть молекул  $O_2$ . Доля ионизованных молекул составляет  $k = 10^{-12}$ . В результате образуются положительно заряженные ионы  $O_2^+$  и отрицательно заряженные ионы  $O_2^-$  (это молекулы  $O_2$  с присоединенными электронами). Контейнер имеет размеры  $10 \times 10 \times 2$  см<sup>3</sup>, причем стенки  $10 \times 10$  см<sup>2</sup> сделаны из металла, а остальные – из изолирующего материала. К проводящим стенкам приложена э.д.с.  $U = 1000$  В. Считая, что средняя длина свободного пробега ионов равна  $\lambda = 10^{-5}$  см, вычислите проводимость  $\sigma$  газа и ток  $I$  (в амперах), текущий через газ.

3.4 (Иродов "Задачи", 1997, 2.158) При каком сопротивлении  $R_1$  в цепочке (рис. 1) сопротивление между точками  $A$  и  $B$  не зависит от числа ячеек?

Рис. 1:

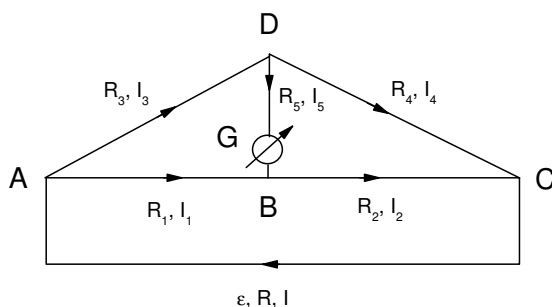


3.5 (Сивухин, т.3, 1996, п.45) Схема, изображенная на рис. 2, называется мостиком Уитстона. Считая известными э.д.с.  $\varepsilon$  и все сопротивления  $R, R_1, R_2, R_3, R_4$  и  $R_5$ , найдите ток  $I_5$ . Покажите, что если  $I_5 = 0$ , то

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}.$$

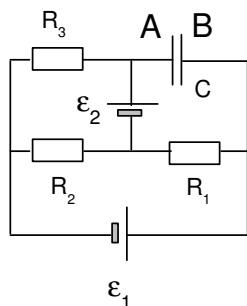
*Пояснение.* Мостик Уитстона используют для измерения сопротивления проводов. Ветвь  $AC$  (реохорд) изготавливается из длинной однородной проволоки с большим удельным сопротивлением, так что отношение  $R_1/R_2$  можно заменить отношением длин  $AB/BC$ . Тогда, используя известное сопротивление  $R_4$  и выбирая положение точки  $B$  так, что  $I_5 = 0$ , получаем  $R_3$ .

Рис. 2:



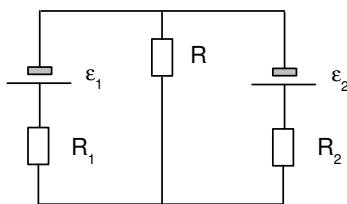
3.6 (Иродов "Задачи", 1997, 2.193) Найдите разность потенциалов  $\varphi_A - \varphi_B$  между обкладками конденсатора  $C$  схемы, изображенной на рис. 3. Величины  $R_1, R_2, R_3, \varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  известны. Внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы.

Рис. 3:



3.7 (Иродов "Задачи", 1997, 2.205; БКФ, т.2, 4.13) В схеме (рис. 4) известны  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ . Внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы. При каком сопротивлении  $R$  выделяемая на нем тепловая мощность максимальна? Чему она равна? Верно ли утверждение, что при присоединении батареи с фиксированной э.д.с.  $\varepsilon$  и внутренним сопротивлением  $R_i$  к переменному внешнему сопротивлению  $R$ , на внешнем сопротивлении выделяется максимальная мощность при  $R = R_i$ ?

Рис. 4:



3.8 (БКФ, т.2, 4.18) Круглая частица графита диаметром  $d = 10$  мкм падает в вакууме, пересекая пучок протонов с энергией  $E = 3$  кэВ. Частицу стряхнули с поверхности, находящейся над верхним краем пучка на высоте  $h = 10$  см. Пучок движущихся горизонтально протонов несет ток  $I = 10$  мА, равномерно распределенный по круглому сечению радиусом  $r = 2$  см. Примем, что протоны застревают в графите. Что произойдет с частицей? Есть несколько вопросов, над которыми следует подумать. Сколько протонов должна захватить частица, чтобы ее потенциал стал достаточным для отталкивания остальных протонов? Сколько (приблизительно) времени это займет: больше ли, чем нужно частице, чтобы пересечь весь пучок при падении? Приобретет ли частица сколько-нибудь заметную скорость в горизонтальном направлении? Сильно ли она нагреется? Сможет ли подобный пучок протонов, направленный вертикально вверх, поддерживать частичку графита в вакууме?

#### Задание 4. Постоянное магнитное поле

4.1 (Иродов "Задачи", 1997, 2.232) Найдите величину и направление индукции магнитного поля в точке  $O$  контура с током  $I$ , показанного на рис. 5. Радиус  $a$  и сторона  $b$  известны (точка  $O$  лежит в центре окружности радиуса  $a$  и в вершине квадрата со стороной  $b$ ).

4.2 (Иродов "Задачи", 1997, 2.239) Найдите величину и направление индукции магнитного поля в точке  $O$ , если проводник с током  $I = 8.0$  А имеет вид, показанный на рис. 6. Радиус изогнутой части проводника  $R = 10.0$  см, прямолинейные участки проводника очень длинные.

4.3 (БКФ, т.2, 6.6) Провод, передающий большому магниту постоянный ток  $I = 5000$  А, изготовлен следующим образом. Сплошной алюминиевый стержень диаметром  $d = 5$  см окружен

Рис. 5:

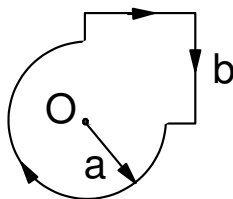
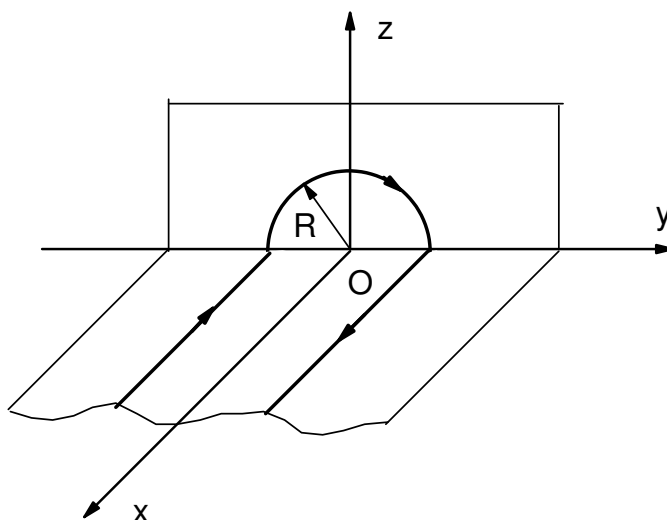


Рис. 6:



возвратным проводником в форме алюминиевого цилиндра с внутренним диаметром  $r_1 = 7$  см и наружным  $r_2 = 9$  см. Внутреннее пространство между стержнем и цилиндром заполнено протекающим маслом, которое служит для отвода тепла. В каждом проводнике плотность тока практически постоянна по всему поперечному сечению. Вычислите и нанесите на график величину магнитного поля (в Гс) как функцию расстояния (в см) от оси. Искажение магнитного поля в присутствии веществ – алюминия и масла – пренебрежимо мало.

4.4 (БКФ, т.2, 6.7) Соленоид изготовлен из одного слоя медного провода, намотанного на цилиндр диаметром  $d = 6$  см. На длину  $\Delta L = 1$  см приходится  $\Delta N = 5$  витков. Длина соленоида  $L = 30$  см. Пользуясь таблицами, мы находим, что сопротивление взятого медного провода, диаметром 0.163 см, равно  $\Delta R = 0.010$  Ом на  $\Delta l = 1$  м при температуре  $75^0$  (мы ожидаем, что эта катушка будет нагреваться!). Соленоид соединен с 24-вольтовым генератором. Вычислите индукцию магнитного поля в соленоиде (в Гс и Тл) и рассеяние энергии (в Вт).

4.5 (Иродов "Задачи", 1997, 2.247) В толстом прямом проводе, радиус сечения которого равен  $R$ , имеется цилиндрическая полость радиуса  $a$ , ось которой параллельна оси провода и смещена относительно последней на расстояние  $b$ . По проводу течет постоянный ток плотности  $j$ . Найдите вектор  $\vec{B}$  индукции магнитного поля внутри полости.

4.6 (БКФ, т.2, 6.5) Атом водорода состоит из протона и нейтрона. Примем, что электрон движется вокруг протона по круговой орбите с радиусом  $a = \hbar^2/me^2 = 0.53 \cdot 10^{-8}$  см со скоростью  $v = e^2/\hbar$ , где  $e = 4.8 \cdot 10^{-10}$  СГСЭ<sub>q</sub> – элементарный заряд,  $\hbar = 1.05 \cdot 10^{-27}$  эрг·сек – постоянная Планка. Какая сила тока (в А) эквивалентна этому циркулирующему заряду? Какова величина (в Гс и Тл)

магнитного поля вблизи протона, создаваемого движением электрона?

4.7 (Иродов "Задачи", 1997, 2.258) Тонкий провод (с изоляцией) образует плоскую спираль из  $N = 100$  плотно расположенных витков, по которым течет ток  $I = 1$  А. Радиусы внутреннего и внешнего витков равны  $a = 50$  мм и  $b = 100$  мм. Найдите индукцию  $B$  магнитного поля в центре спирали.

4.8 (Иродов "Задачи", 1997, 2.282) Вдоль длинного тонкостенного круглого цилиндра радиуса  $R = 5.0$  см течет ток  $I = 50$  А. Какое давление  $P$  испытывают стенки цилиндра? Является ли это давление сжимающим или разрывающим?

4.9 (Иродов "Задачи", 1997, 2.287) При измерении эффекта Холла в натриевом проводнике напряженность поперечного поля оказалась равной  $E = 5.0$  мкВ/см при плотности тока  $j = 200$  А/см<sup>2</sup> и индукции магнитного поля  $B = 1.00$  Тл. Найдите концентрацию электронов проводимости и ее отношение к концентрации атомов в данном проводнике.

4.10 (БКФ, т.2, 6.9) Океанское течение имеет скорость  $v = 1$  м/сек в районе, где вертикальная составляющая магнитного поля Земли равна  $B = 0.35$  Гс. Проводимость морской воды в этом районе равна  $\sigma = 0.04$  (Ом·см)<sup>-1</sup>. Найдите плотность горизонтальной составляющей электрического тока (в А/м<sup>2</sup>).

4.11 (БКФ, т.2, 6.14) Параллельные проводники с током притягиваются, поэтому можно было бы думать, что ток, текущий в сплошном стержне, имеет тенденцию сконцентрироваться около оси стержня. Это значит, что электроны проводимости, вместо того, чтобы распределиться равномерно внутри металла, соберутся около оси. Что, по-вашему, препятствует этому? Произойдет ли это, в какой-то мере, вообще (предложите численную оценку эффекта)? Можете ли вы предложить эксперимент для обнаружения такого эффекта, если он существует?

4.12 Однородный соленоид диаметром  $D = 10$  см сделан таким образом, что при удалении от центра соленоида вдоль оси на  $l = 1$  см поле меняется менее чем на  $\eta = 1\%$ . Какова минимальная длина  $L$  соленоида? Покажите, что поле на оси соленоида можно сделать меняющимся по закону  $a + cx^4 + dx^6 + \dots$  (т.е. без слагаемого  $\sim bx^2$ ), где  $x$  – расстояние от центра, если обесточить центральную часть соленоида. Найдите длину  $h$  этой обесточенной части.

#### ГРАФИК СДАЧИ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ

1-е задание:

2-е задание:

3-е задание:

4-е задание: