

ИНСТИТУТ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК И ЭКОЛОГИИ

ПРИМЕРЫ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАЧ по курсу:

МЕХАНИКА

для студентов 1 курса (I семестр)

Автор: к.ф.-м.н. Романов Сергей Викторович

1. В вертикальной плоскости установлена тонкая проволока, изогнутая вдоль кривой

$$y = a(\operatorname{ch}(x/a) - 1).$$

Параметр a известен. По проволоке может скользить без трения точечный груз. Найти частоту малых колебаний груза вблизи точки $x = 0$.

2. Точечный груз массы m может скользить без трения вдоль горизонтального стержня, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O на стержне. К грузу прикреплен невесомая пружина жесткости k , другой конец которой закреплен в точке O' , расположенной над точкой O . Длина пружины в положении OO' равна l , длина нерастянутой пружины $l_0 < l$. Выяснить, при каких значениях угловой скорости ω положение равновесия O устойчиво и найти частоту малых гармонических колебаний груза вблизи этого положения.
3. Проволочное кольцо радиуса R расположено в горизонтальной плоскости и вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через точку A на кольце. В момент времени $t = 0$ из точки B , диаметрально противоположной A , по кольцу начинает скользить без трения точечный груз. Начальная скорость груза относительно кольца равна $v_0 = 2\omega R$. Найти зависимость от времени центрального угла φ , задающего положение груза на кольце. Для точки B угол $\varphi = 0$.
4. Бесконечно длинный стержень вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O на стержне. По стержню может скользить без трения точечный груз. В момент времени $t = 0$ стержень горизонтален, груз расположен в точке O и имеет относительно стержня скорость v_0 . Найти зависимость от времени координаты груза на стержне.
5. Геофизическая ракета стартует с поверхности Земли вертикально вверх. Масса топлива равна m , масса ракеты без топлива M , секундный расход топлива μ и скорость истечения газов относительно ракеты u постоянны. Найти скорость ракеты к моменту полного выгорания топлива. На какой высоте окажется ракета в этот момент? Поле силы тяжести считать однородным. Вращением Земли и сопротивлением воздуха пренебречь.
6. По бесконечно длинному горизонтальному стержню могут скользить без трения два точечных груза, соединенные невесомой пружиной жесткости k . Массы грузов равны m_1 и m_2 . Сначала грузы неподвижны, пружина не деформирована. В момент времени $t = 0$ на груз m_1 начинает действовать горизонтальная сила $F = F_0 \sin \omega t$. Найти зависимость координат грузов от времени. Длина нерастянутой пружины равна l_0 .
7. Бесконечно длинный горизонтальный стержень вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O на стержне. По стержню могут скользить без трения два точечных груза массами m_1 и m_2 , соединенные невесомой пружиной жесткости k . Сначала груз m_1 закреплен в точке O , груз m_2 свободен, пружина растянута, колебаний нет. В момент времени $t = 0$ груз m_1 отпускают без начальной скорости. Найти зависимость от времени координат грузов на стержне. Длина нерастянутой пружины равна l_0 . Параметры системы удовлетворяют неравенству: $k > m_2 \omega^2$.

8. Предположим, что гравитационное взаимодействие двух точечных масс m_1 и m_2 отличается от закона обратных квадратов. А именно, пусть потенциальная энергия взаимодействия равна

$$U(r) = -a/r - b/r^2,$$

r – расстояние между частицами, $a = \gamma m_1 m_2$, γ – гравитационная постоянная, b – некоторая положительная константа. Пусть суммарный момент импульса частиц в системе центра инерции L удовлетворяет условию: $L^2 > 2\mu b$, μ – приведенная масса. Получить уравнение траектории финитного движения в задаче об относительном движении частиц. Указать условие замкнутости траектории.

9. В условиях задачи 8 получить уравнение траектории для случая $0 < L^2 < 2\mu b$. Полную энергию частиц в системе центра инерции считать отрицательной.
10. В предыдущей задаче найти время, за которое частицы сольются. Считать, что в момент времени $t = 0$ относительная скорость частиц перпендикулярна отрезку, соединяющему частицы.