0.1 ЛАГРАНЖЕВА МЕХАНИКА.

0.1.1 Уравнения Лагранжа.

Связи.

Аналитическая механика в основном занимается решением задач о движении системы взаимодействующих частиц, когда на систему наложены определенные ограничения, называемые связями. Если в процессе движения между координатами и скоростями отдельных составляющих системы должно быть выполнено условие $f(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = 0$, то такое соотношение называется уравнением связи. Если уравнение связи не зависит от скорости $f(\mathbf{r}, t) = 0$, то связь называется геометрической, иначе – кинематической. В дальнейшем мы будем рассматривать только линейные кинематические связи вида $\mathbf{K}\mathbf{v} + D = 0$ с вектором $\mathbf{K}$ не зависящем от скорости. Каждая геометрическая связь влечёт за собой кинематическую: дифференцируя геометрическую связь по времени мы получим

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \dot{\mathbf{r}} = 0 \tag{1}$$

Поэтому кинематические связи приводимые к виду уравнения (1) называются интегрируемыми. Их можно отличить от истинно кинематических связей, применяя теорему Фробениуса о интегрируемости систем дифференциальных уравнений[**?**].

Пусть на систему наложены g геометрических связей и k кинематических. Из геометрических связей получим ограничения для скоростей вида уравнения (1). Совместно эти $g + k$ условий определяют так называемее возможные скорости, т.е. скорости, которые удовлетворяют данным связям. Например, если точка движется по неподвижной поверхности, то в каждой точке этой поверхности возможные скорости лежат в касательной плоскости, проходящей через эту точку. В зависимости от начальных условий при движении системы реализуется одна из этих возможных скоростей. Перемещение вдоль возможной скорости называется возможным перемещением $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$. Оно удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r} = 0 \\ \mathbf{K} d\mathbf{r} + D dt = 0 \end{aligned}$$

Разность двух возможных перемещений называется виртуальным перемещением $(\delta \mathbf{r} = d\mathbf{r}_1 - d\mathbf{r}_2)$. Оно, в свою очередь, удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \delta \mathbf{r} = 0 \\ \mathbf{K} \delta \mathbf{r} = 0 \end{aligned}$$

Поэтому можно сказать, что виртуальное перемещение - это возможное перемещение в фиксированный момент времени. Если связь состоит в том, что тело находится

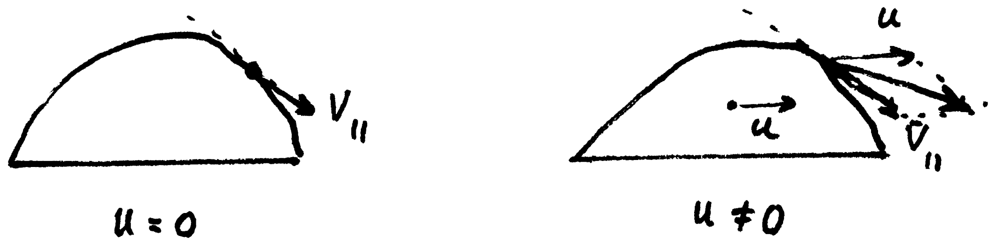

Рис. 1: Разница между возможным и виртуальным перемещениями

на заданной поверхности, то виртуальное перемещение лежит в касательной плоскости, поскольку перпендикулярная составляющая скорости может возникать только из-за движения поверхности как целого:

$$\delta \mathbf{r} = d\mathbf{r}_1 - d\mathbf{r}_2 \Rightarrow \delta \mathbf{r} = \left(\mathbf{v}_{\parallel}^1 + \mathbf{v}_{\perp}^1\right)\, dt - \left(\mathbf{v}_{\parallel}^2 + \mathbf{v}_{\perp}^2\right)\, dt \Rightarrow \delta \mathbf{r} = \left(\mathbf{v}_{\parallel}^1 - \mathbf{v}_{\parallel}^2\right)\, dt$$

Этот случай иллюстрируется на Рис 1. Понятия о возможном и виртуальном перемещениях вводятся главным образом для того, чтобы корректно определить идеальную связь (см ниже), которая в первом приближении может быть определена как движение по заданной поверхности без трения.

Общее уравнение механики .

Реакция системы $\mathbf{R}$ - это силы, возникающие из-за наложенных на систему связей и заставляющие систему двигаться так, чтобы удовлетворить уравнениям связи. Пусть система состоит из N частиц. Уравнения Ньютона для системы представляют собой систему $(3N)$ дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i \tag{2}$$

Задача механики состоит в том, чтобы по внешним силам определить траектории движения системы и реакции связей. Поскольку число сил реакции $(3N)$ превосходит число связей $g + k$, то мы должны каждый раз дополнять задачу какими-то физическими соображениями о природе связей. Достаточно распространенным случаем является модель идеальных связей,

$$(\mathbf{R}_i \delta \mathbf{r}_i) = 0$$

т.е. силы реакции таких связей, перпендикулярны поверхности и не производят работы при движении системы. Типичным примером такой связи является движение тела по заданной поверхности без трения. Для таких связей мы можем домножить уравнения (2) скалярно на $\delta\mathbf{r}$ и в результате получить так называемое общее уравнение механики

$$((m\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} - \mathbf{F_i})\delta\mathbf{r_i}) = 0 \qquad (3)$$

Оно замечательно тем, что силы связей в него явно не входят и могут быть определены позднее из системы (2) как $\mathbf{R}_i = m\ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i$.

Уравнения Лагранжа первого рода .

Пусть $\mathbf{R}$– реакция связи. Будем рассматриваем лишь идеальные связи. Исходная система уравнений Ньютона и уравнений связи имеет вид :

$$\begin{cases} f(\mathbf{r},t) & = & 0 & g- \\ \mathbf{K}\,\dot{\mathbf{r}} + D & = & 0 & k- \\ \mathbf{F}+\mathbf{R} & = & m\ddot{\mathbf{r}} & 3N- \end{cases}$$

Из-за связей число независимых переменных n меньше $3N$: n=$3N - g - k$. Обычно n называют числом степеней свободы. Используем $g + k$ первых уравнений для определения этих независимых переменных. По определению для независимых переменных выполняются уравнения:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}, \delta\mathbf{r}\right) = 0 \qquad (\mathbf{K}, \delta\mathbf{r}) = 0$$

Для независимых переменных поэтому автоматически выполняется уравнение :

$$\left(\mathbf{R} - \lambda\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \mu\mathbf{K}, \delta\mathbf{r}\right) = 0$$

Поскольку $\delta\mathbf{r}$ незввисимы, то

$$\mathbf{R} - \lambda\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \mu\mathbf{K} = 0$$

Подберём теперь множители Лагранжа λ и μ таким образом, чтобы это условие выполнялось и для зависимых переменных . Для реакции связи получаем таким образом $\mathbf{R} = \lambda\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}} + \mu\mathbf{K}$. В итоге получается система из $3N + g + k$ уравнений для $3N + g + k$ переменных $\mathbf{r}_i, \lambda_g, \mu_k$.

$$\begin{cases} f(\mathbf{r},t) = 0 \\ \mathbf{K}\,\dot{\mathbf{r}} + D = 0 \\ \mathbf{F} - \lambda_g\frac{\partial f_g}{\partial \mathbf{r}} - \mu_k\mathbf{K}_k = m\ddot{\mathbf{r}} \end{cases} \qquad (4)$$

Уравнения Лагранжа первого рода можно применять и в случае кинематических неинтегрируемых связей. Как мы увидим ниже область применения уравнений Лагранжа первого рода шире, но применять их значительно менее удобно, чем уравнения Лагранжа второго рода.

Уравнения Лагранжа второго рода.

Рассмотрим систему с интегрируемыми связями $f(\mathbf{r}, t) = 0$. Уравнения связей в принципе позволяют исключить g переменных, выразив их через остальные $n = 3N - g$ независимых переменных. Эти независимые переменные, которые автоматически делают уравнения связи тождествами, мы будем называть обобщенными координатами q_i. Исходные координаты могут быть выражены через эти новые координаты

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, ...q_i) \tag{5}$$

и $f_g(r(q), t) \equiv 0$ Дифференцируя уравнения (5) мы можем выразить исходные скорости частиц через производные от обобщенных координат по времени

$$\frac{d\mathbf{r}_i(q)}{dt} = \mathbf{v}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j}\dot{q^j} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \tag{6}$$

Кинетическая энергия в этих новых координатах имеет вид

$$T = \frac{1}{2}\sum_i (m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_i}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k + 2m_i\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial r_i}{\partial t}\dot{q}_j + m_i\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}) = \frac{1}{2}T^2_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j + T^1_i\dot{q}^i + T^0 \tag{7}$$

где коэффициенты T^i зависят только от координат q, но не их производных $\dot{q}$.

Наконец определим обобщенные силы Q_j, так чтобы работа выполняемая внешними силами на виртуальных перемещениях совпадала с работой обобщенных сил при изменении обобщенных координат

$$\delta A = (\mathbf{F}_i, \delta\mathbf{r}_i) = \left(\mathbf{F}_i\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j}\right)\delta q^j = Q_j\delta q^j \tag{8}$$

Перепишем общее уравнение механики $(m\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{F}, \delta\mathbf{r})$. используя $\delta\mathbf{r}_i = \partial\mathbf{r}_i/\partial q^j \delta q^j$: Поскольку δq^j независимы, мы получим систему уравнений :

$$m\left(\frac{d\mathbf{v}_i}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right) = Q_j$$

Правая часть уравнения

$$m\dot{\mathbf{v}}_i\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} = m\frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}_i\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j}\right) - m\mathbf{v}_i\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j}$$

может быть выражена через производные по обобщенным координатам от кинетической энергии с помощью соотношений (6) и (7)

$$\sum_i m_i\mathbf{v}_i\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} = \sum_i m_i\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j}\dot{q^j} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j}\right) = \frac{\partial T(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{g}^j} \tag{9}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial g^j} = \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial q^j\partial q^k}\dot{q}^k + \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial q^j\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q^j} \qquad \sum_i m_i\mathbf{v}_i\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} = \sum_i m_i\mathbf{v}_i\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q^j} = \frac{\partial T}{\partial q^j} \tag{10}$$

Окончательно уравнения Лагранжа второго рода приобретают вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

В случае потенциальных сил $Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q{:}j}$, где U - потенциальная энергия. Введем Лагранжиан L как разность между кинетической и потенциальной энергиями $L = T - U$. Тогда уравнения можно переписать как:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \tag{11}$$

Именно в таком виде уравнения используются наиболее часто.

Замечание.

В определение Лагранжиана мы ввели потенциальную энергию.Возникает вопрос, когда это возможно. Для существования U необходимо, чтобы работа сил между двумя точками 1 и 2 не зависела от пути по которому движется система, а тем самым интеграл $\oint \mathbf{F}d\mathbf{s}$ по любому замкнутому пути был бы равен нулю. По теореме Стокса $\oint \mathbf{F}d\mathbf{s}$=$\int\int \mathrm{rot}\mathbf{F}d\sigma$. Поэтому для существования потенциальной энергии необходимо чтобы rot$\mathbf{F}$=0. В этом случае $\mathbf{F} = -\bigtriangledown U$

0.1.2 Законы сохранения

Закон сохранения энергии

Выше уже использовалось выражение для кинетической энергии в обобщенных координатах (7) .

$$T = \frac{1}{2}\sum_i T^2_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + T^1_i\dot{q}_i + T^0$$

Если связь не зависит от времени, то T^1_i=T^0=0. Пусть потенциальная энергия также не зависит от времени: $\partial U/\partial t$=0. Тогда Лагранжиан зависит от времени только через зависимость от времени координаты $q(t)$ и скорости $\dot{q}(t)$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i$$

Заменяя производную по координате ее значением из уравнения Лагранжа получим

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$$

т.е величина

$$\left(\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right)$$

сохраняется. В случае, когда кинетическая энергия является квадратичной формой от $\dot{q}_i$ справедливо равенство

$$\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = T^2_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j = 2T$$

Поэтому сохраняется $E = T + U$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial q_i} - L\right) = \frac{d}{dt}(T + U) = 0$$

Подчеркнем, что закон сохранения в таком виде есть следствие динамических уравнений движения. Но если внимательно проследить за выводом закона сохранения энергии то можно заметить, что он верен постольку, поскольку $\partial U/\partial t$=0 и связи являются стационарными. Иными словами это означает, что все взаимодействия не меняются с течением времени, т.е. закон сохранения энергии есть следствие однородности по отношению к сдвигу по времени.

Практическим следствием закона сохранения энергии (или как говорят существования интеграла движения) является возможность решения в квадратурах любой одномерной задачи или задачи, приводящейся к одномерной. Для этого найдем скорость из закона сохранения энергии

$$\frac{dq}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U)} \tag{12}$$

и проинтегрируем данное выражение

$$\int_{q_0}^{q} \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U)}} = t - t_0 \tag{13}$$

Импульс системы

Величиной, сохраняющейся вследствие однородности пространства является импульс. Сделаем однородный сдвиг координат на величину $\delta\mathbf{r_i}$. С одной стороны в случае однородного пространства Лагранжиан не изменится, а с другой стороны его изменение есть

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial r_i}\delta r_i = 0$$

Поэтому в силу уравнений Лагранжа сохраняется величина,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial L}{\partial v} = \mathrm{const}$$

которая называется импульсом p.

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i} \tag{14}$$

Момент количества движения

Момент количества движения сохраняется в случае изотропного пространства. Сделаем поворот системы относительно какой-то оси в пространстве на угол $\delta\phi$ Тогда изменение вектора $\mathbf{r}$ будет составлять

$$\delta\mathbf{r} = [\delta\varphi \times \mathbf{r}], \quad \delta\mathbf{v} = [\delta\varphi \times \mathbf{v}]$$

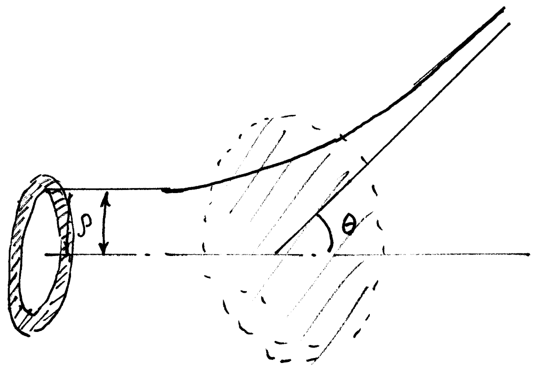

Рис. 2: Эксперимент по рассеянию

что повлечёт изменение Лагранжиана на

$$\delta L = \partial L/\partial \vec{r} \cdot \delta \vec{r} + \partial L/\partial \vec{v} \cdot \delta \vec{v} = \partial/\partial t \cdot (\partial L/\partial \vec{v}) \cdot \delta \vec{r} + \partial L/\partial \vec{v} \cdot \delta \vec{v} = \dot{p}[\delta\varphi \times \vec{r}] + p[\delta\varphi \times \vec{r}] =$$

$$= \delta\vec{\varphi}([r \times \dot{p}] + [\dot{r} \times p]) = \delta\vec{\varphi} \cdot d/dt \cdot [r \times p]$$

Но так как пространство изотропно, то Лагранжиан измениться не может и поэтому величина $r \times p$ сохраняется.

0.1.3 Сечение рассеяния

Одной из наиболее распространённых физических задач является задача о движении пучка часиц в заданном потенциальном поле. В том или ином виде она возникат в большинстве физических экспериментов, в том числе в экспериментах по рассеянию частиц. Именно в таком эксперименте Резерфорд впервые установил планетарную модель атома. Количественной мерой эффективности рассеяния частиц в поле является дифференциальное сечение рассеяния. Пусть на мишень падает пучок частиц, летящий со скоростью v и плотность частиц в потоке есть n. Дифференциальным сечением рассеяния называется отношение числа частиц dN, рассеянных в телесный угол $d\Omega$ к плотности частиц в потоке

$$d\sigma = \frac{dN}{n}$$

Пусть ρ - прицельное расстояние. В классической механике угол вылета частицы однозначно определяется этой величиной. $\rho = \rho(\theta)$ и $\theta = \theta(\rho)$ Тогда число частиц dN в интервале между углом θ и $\theta + d\theta$ есть как раз число частиц в интервале между ρ и $\rho + d\rho$: $dN = 2\pi\rho d\rho$. Как следствие

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho = 2\pi\rho \left|\frac{d\rho}{d\theta}\right| d\theta = \rho \left|\frac{d\rho}{d\theta}\right| \frac{d\Omega}{\sin\theta}$$

И мы получаем общую формулу для дифференциального сечения рассеяния

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} == (\rho \left|\frac{d\rho}{d\theta})\right| \frac{1}{\sin\theta}$$

Рассмотрим в качестве примера рассеяние частицы на непроницаемом шарике. Соударение будем считать абсолютно упругим. Тогда

$$\theta = \pi - 2\varphi$$

$$\rho = a\sin 2\varphi = a\cos\theta/2\cdot$$

$$d\rho = a\cos\varphi d\varphi = -a\sin\theta/2\cdot d\theta/2$$

$$d\sigma = a^2\cdot(\cos\theta/2\sin\theta/2)/2\cdot d\Omega/\sin\theta = a^2/4\cdot d\Omega$$

Полное сечение рассеяния равно $\sigma = \int d\Omega\cdot a^2/4 = \pi a^2$, т.е. оно равно той площади πa^2, которую как бы видит перед собой налетающая частица.

0.1.4 Малые колебания

Равновесие системы

Равновесию системы отвечает такое ее состояние $\dot{q} = 0$, $q = q_0$, при котором $\partial U/\partial q^i = 0$. Если же $\partial U/\partial q^i \neq 0$, то $\dot{q} = 0$, $q = q_0$ просто не является решением уравнения Лагранжа. Положение равновесия может быть устойчивым или неустойчивым. Устойчивому равновесию системы соответствует такое ее положение, в котором её потенциальная энергия имеет минимум - отклонения от такого положения приводят к возникновению силы $-\partial U/\partial q^i$, стремящейся вернуть систему обратно. Как мы увидим, движение вблизи устойчивого положения равновесия эквивалентно движению связанной системы осцилляторов. Устойчивость системы гарантирует нахождение вблизи точки равновесия, но не означает возврата к положению равновесия при $t\to\infty$, т.е. асимптотически. Асимптотическая устойчивость $\dot{q}\to 0$ $q\to q_0$ при $t\to\infty$ возникает, если в системе есть трение. Строгое определение устойчивого равновесия может быть сформулировано следующим образом

Равновесие в точке q_0 устойчивое,если для любого ε найдется такое δ, что при

$$|q(0) - q_0| < \delta \quad \left|\frac{dq}{dt}\right| < \delta$$

следует

$$|q(0) - q_0| < \varepsilon \quad \left|\frac{dq}{dt}\right| < \varepsilon$$

Вблизи положения равновесия мы можем произвести линеаризацию, т.е. разложить Лагранжиан в ряд Тэйлора по малым отклонениям от положения равновесия. При этом скорость уже является малой величиной и при разложении до членов второго порядка малости коэффициент $T^2_{ij}(q)$ можно сразу взять при $q = q_0$

$$L = \frac{\dot{q}_i \dot{q}_j a_{ij}}{2} - \frac{q_i q_j b_{ij}}{2}$$

$$a_{ij} = T^2_{ij}(q_0) \qquad b_{ij} = \frac{\partial^2 U(q)}{\partial q^i \partial q^j}_{q=q_0}$$

Линейные члены исчезают из-за условия равновесия $\dot{q} = 0$, $\partial U / \partial q = 0$ Уравнения Лагранжа имеют вид

$$A_{ij} \ddot{q}^j + b_{ij} q^j = 0; \tag{15}$$

т.е. являются системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В одномерном случае это дифференциальное уравнение второго порядка

$$a\ddot{q} + bq = 0;$$

и оно имеет решение, которое можно записать несколькими эквивалентными способами:

$$q = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t) = \mathrm{Re} A e^{i\omega_0 t} = f\cos(\omega_0 t + \phi); \qquad \omega_0^2 = b/a; \tag{16}$$

Величина A является комплексной и ее модуль есть f а фаза ϕ. В случае системы с несколькими степенями свободы (**??**) общим решением будет суперпозиция всех решений отвечающих собственным колебаниям системы.

$$q_i = \sum_\nu \mathrm{Re} A_i^\nu e^{i\omega^\nu t}; \qquad \left((-\omega^\nu)^2 a_{ij} + b_{ij}\right) A_j^\nu = 0; \tag{17}$$

ω^ν, при которых система имеет нетривиальное решение, т.е. определитель системы обращается в ноль, называют собственными частотами системы. Если система колеблется только с одной из возможных ω^ν, то говорят, что она колеблется в определённой моде. Если в системе квадраты каких-то собственных частот окажутся отрицательными ($\omega = i\lambda$), то соответствующие решения ведут себя как $\exp(\lambda t)$ и система уходит от положения равновесия. Это просто означает что потенциальная энергия в данной точке имеет максимум или седло и точка неустойчива.

Несмотря на простоту общего решения - простая суперпозиция колебании различных мод - с точки зрения наблюдателя система может вести себя достаточно интригующе. В качестве примера рассмотрим систему из двух одинаковых маятников, соединённых между собой пружинкой. Лагранжиан такой системы есть

$$L = \frac{ml^2\dot{\phi}_1^2}{2} + \frac{ml^2\dot{\phi}_2^2}{2} + mgl\cos\phi_1 + mgl\cos\phi_2 + \frac{cl^2(\phi_1 - \phi_2)^2}{2}$$

После разложения по малым ϕ_1 и ϕ_2

$$L = \frac{ml^2\dot{\phi}_1^2}{2} + \frac{ml^2\dot{\phi}_2^2}{2} - \frac{mgl\phi_1^2}{2} - \frac{mgl\phi_2^2}{2} + \frac{cl^2(\phi_1 - \phi_2)^2}{2}$$

Вводя новые переменные

$$\phi = \frac{\phi_1 + \phi_2}{\sqrt{2}} \qquad \chi = \frac{\phi_1 - \phi_2}{\sqrt{2}}$$

приведём Лагранжиан к виду

$$L = \frac{ml^2\dot{\phi}^2}{2} + \frac{ml^2\dot{\chi}^2}{2} - \frac{mgl\phi^2}{2} - \frac{mgl\chi^2}{2} + \frac{2cl^2(\chi)^2}{2}$$

Видно, что в системе есть суперпозиция двух колебаний с $\omega_1^2 = g/l$ $\omega_2^2 = g/l + 2c/m$ Если подобрать постоянные в общем решении так, чтобы оно удовлетворяло начальным условиям

$$\phi_1 = 0; \qquad \dot{\phi}_1 = 0; \qquad \phi_2 = \phi_0; \qquad \dot{\phi}_2 = 0;$$

то такое решение имеет вид

$$\phi_1 = \psi_0 \sin((\omega 2 - omega_1)t/2)\sin((\omega 2 + omega_1)t/2)$$

$$\phi_2 = \psi_0 \cos((\omega 2 - omega_1)t/2)\cos((\omega 2 + omega_1)t/2)$$

И при слабой связи первый маятник приобретёт заметную амплитуду через $T = \pi/(\omega_2 - \omega_1)$. В этот момент второй маятник остановтися. Так энергия колебаний будет переходить от одного маятника к другому.

Маятник с затуханием под действием периодической внешней силы. Резонанс

Пусть в системе есть также трение. При малых скоростях она пропорциональна скорости и уравнения движения приобретают вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -2\gamma\,\dot{x}$$

где $\gamma > 0$ постоянный коэффициент. Справа в этом уравнении стоит обобщенная сила трения, делённая на массу. Это однородное уравнение попрежнему является линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами и его решение ищем в виде $A\exp(-i\omega t)$

$$(-\omega^2 - 2i\omega\gamma + \omega_0^2)A = 0 \to \omega = -i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

т.е решения теперь становятся затухающими и в системе существует асимптотическая устойчивость.

Пусть теперь на систему действует ещё и внешняя гармоническая сила $F(t) = F\exp(i\Omega t)$. Уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\gamma\,\dot{x} = F(t)$$

Решение является суммой общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Решение однородного уравнения зависит от начальных условий, но затухает со временем, и при временах $t >> 1/\gamma$ остаётся только решение неоднородного уравнения, которое мы ищем в виде $A\exp(i\Omega t)$ Амплитуда вынужденных колебаний

$$A = \frac{f}{-\Omega^2 + \omega_0^2 - i\Omega\gamma} = \frac{-\Omega^2 + \omega_0^2 + i\Omega\gamma}{(-\Omega^2 + \omega_0^2)^2 + \Omega^2\gamma^2} f$$

При малых γ модуль амплитуды имеет резкий максимум при $\Omega \sim \omega_0$ и система, как говорят, попадает в резонанс. При этом фаза A, которая имеет смысл сдвига по времени отклика системы относительно внешней силы проходит через $\pi/2$.

Замечание

В случае отсутствия трения достаточно легко написать решение уравнений движения при произвольной внешней силе $F(t)$, действующей на систему. Уравнения движения имеют вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F(t)$$

Перепишем это уравнение второго порядка как систему двух уравнений первого порядка

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} + x\omega_0^2 = F(t)/\omega_0 = f(t)$$

Тогда $\xi = y + i\omega_0 x$ удовлетворяет уравнению первого порядка, которое получается домножением первого уравнения на $i\omega_0$ и сложением этих двух уравнений

$$\dot{\xi} - i\omega_0\xi = f(t)$$

Решение неоднородного уравнения первого порядка есть произведение решения однородного уранения и новой функции $A(t)$ $\xi = A(t)\exp(i\omega_0 t)$

$$\dot{A} = F(t)\exp(-i\omega_0 t) \qquad \to A(t) = \int_a^t dt' F(t')\exp(-i\omega_0 t') + C$$

И наконец $x(t)$ можно восстановить отделяя мнимую часть $\xi(t)$.

0.1.5 Вращение твёрдого тела.

Углы Эйлера .

Хорошей иллюстрацией применения уравнений Лагранжа является задача о вращении твёрдого тела произвольной формы. Любой поворот тела в пространстве

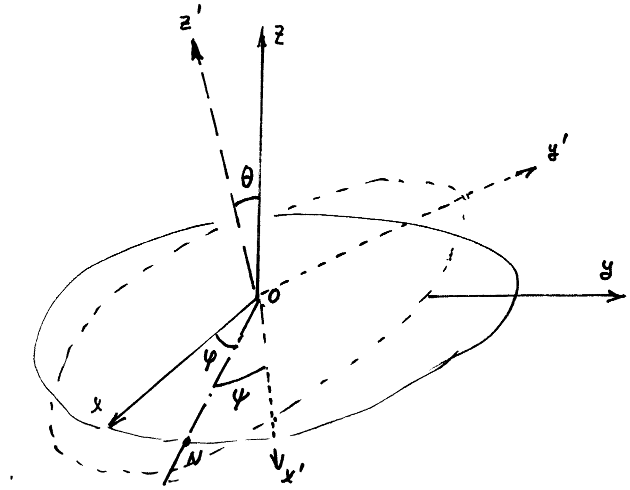

Рис. 3: Углы Эйлера

может быть представлен как последовательное выполнение трёх поворотов в плоскости. Одной из распространённых последовательностей является последовательность поворотов на углы Эйлера . Эта последовательность изображена на Рис. 3 Как известно матрица каждого поворота вокруг оси z в плоскости xy имеет вид :

$$B^z_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Полная матрица поворота таким образом представляет собой произведение матриц элементарных поворотов на углы Эйлера: $B = B^z_\psi B^y_\theta B^z_\phi$.

Пусть q и Q координаты в неподвижной и вращающейся системах координат соответственно . Тогда имеет место соотношение

$$q = B\,Q \tag{18}$$

Угловая скорость .

Продифференцируем соотношение (15) по времени $\dot{q} = \dot{B}Q = \dot{B}B^{-1}\,(BQ) = \left(\dot{B}B^{-1}\right) q = Aq$ Матрица A - кососимметрическая. Чтобы это увидеть воспользуемся тем, что матрица поворота B ортогональная, т.е. $B^T = B^{-1}$ и вычислим $(\dot{B^t}) = -B^{-1}\dot{B}B^{-1}$. Отсюда видно, что $A^t{=}B\dot{B}^T = -A$. В 3-х мерном простраестве у кососимметрической матрицы всего 3 независимых компоненты и ее можно задать через компоненты вектора ω_γ $A_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\omega_\gamma$. Тогда $\dot{q} = [\omega \times q]$. Или вводя угловую скорость во вращающейся системе координат Ω как $\omega = B\Omega$

$$\dot{q} = [B\Omega \times B\,Q]$$

Матрица B ортогональная и поэтому последнее равенство можно переписать как

$$\dot{q} = B\,[\Omega \times Q]$$

Составляющие Ω_i вдоль осей подвижной системы координат достаточно просто связать с производными от углов Эйлера. Для этого спроектируем величины $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ $\dot{\psi}$ на оси новой системы и из Рис 3 получим так называемые кинематические уравнения Эйлера :

$$\left\{\begin{array}{l} \Omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta \\ \Omega_2 = -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi \\ \Omega_1 = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi \end{array}\right. \tag{19}$$

Вычислим кинетическую энергию вращающегося тела в случае когда начало системы координат q совпадает с началом системы Q :

$$T = \sum_i m_i \frac{\dot{q}_i \dot{q}_i}{2} = \sum_i m_i \frac{[\Omega \times Q_i]\,[\Omega \times Q_i]}{2}$$

Раскроем это произведение, пользуясь тем, что в смешанном произведении сомножители можно циклически переставлять и далее раскроем двойное векторное произведение

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2}\left(\Omega^2 Q_i^2 - (Q_i\Omega)(Q_i\Omega)\right) = \Omega_\alpha \Omega_\beta \sum_i \frac{m_i}{2}\left(\delta_{\alpha\beta} Q_i^2 - Q_i^\alpha Q_i^\beta\right) = \frac{I_{\alpha\beta}\Omega_\alpha\Omega_\beta}{2}$$

Величина $I_{\alpha\beta} = \sum_i m_i \left(\delta_{\alpha\beta} Q_i^2 - Q_i^\alpha Q_i^\beta\right)$ –называется моментом инерции твёрдого тела. Поскольку T можно рассматривать как симметричную квадратичную форму, то существует такая система координат (система главных осей) в которой тензор $I_{\alpha\beta}$ имеет диагональный вид.

$$I_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

Пусть теперь начала координат систем не совпадают .Тогда

$$\dot{q} = V + B\,[\Omega \times Q]$$

$$T = \sum_i \frac{m_i \dot{q}_i{}^2}{2}$$

$$T = \frac{MV^2}{2} + \sum_i m_i q_i\,[V \times \Omega] + \frac{I_{\alpha\beta}\Omega_\alpha\Omega_\beta}{2}$$

. В случае, когда начало координат выбрано в центре инерции, второй член пропадает ($\sum_i m_i q_i = 0$)

Момент количества движения.

В неподвижной системе координат момент количества движения твёрдого тела определяется как

$$\vec{m} = \sum_i m_i \left[q_i \times \dot{q}_i\right] = \sum_i m_i \left[q_i \times [\omega \times q_i]\right]$$

Заменим q и $\dot{q}$ их значениями, выраженными через координаты в подвижной системе. Вновь используя ортогональность матрицы B получим

$$\vec{m} = B \sum_i m_i \left[Q_i \times [\Omega \times Q_i]\right] = B\vec{M}$$

Раскрывая двойное векторное произведение мы видим, что в подвижной системе момент количества движения пропорционален угловой скорости

$$M_\alpha = \Omega_\beta \sum_i m_i \left(Q_i^2 \delta_{\alpha\beta} - Q_i^\alpha Q_i^\beta\right) = I_{\alpha\beta}\Omega_\beta$$

Динамика симметричного волчка.

Уравнения динамики вращающегося твёрдого тела можно получить или непосредственно из Лагранжиана, варьируя его по динамическим переменным или записывая уравнения для скорости изменения момента количества движения $\dot{m} = k$, где k момент сил в неподвижной системе координат. Второй путь приводит к динамическим уравнениям Эйлера и рассматривается в ПРИЛОЖЕНИИ. В дальнейшем мы будем рассматривать только случай симметричного волчка $A = B \neq C$ когда уравнения движения и их решения проще получить непосредственно из Лагранжиана. В системе главных осей кинетическая энергия симметричного волчка записывается как

$$T = \frac{1}{2}\left(A(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + C\Omega_3^2\right)$$

Используя кинематические уравнения Эйлера (**??**) получим

$$L = \frac{1}{2}\left(A(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin\theta^2) + C(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2\right) - mgl\cos\theta \tag{20}$$

Поскольку Лагранжиан не зависит от величин ψ и ϕ, то сохраняются $\partial L/\partial\dot{\phi} = M_z$ и $\partial L/\partial\dot{\psi} = M_3$

$$M_z = \dot{\phi}A\sin^2\theta + C\cos\theta(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) \tag{21}$$

$$M_3 = C(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) \tag{22}$$

Эти два интеграла движения позволяют исключить $\dot{\psi}$ и $\dot{\phi}$ и свести задачу к одномерной (т.е. зависящей только от переменной θ). Используя закон сохранения энергии, решение задачи с одной степенью свободы может быть выписано в квадратурах. В данном случае с точностью до постоянной $M_3^2/2C$

$$E = \frac{1}{2}\left(A\dot{\theta}^2 + \frac{(M_z - M_3\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta}\right) + mgl\cos\theta \tag{23}$$

и решение может быть выписано как

$$t - t_0 = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{A}(E - U(\theta)}} \quad U = \frac{(M_z - M_3\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta} + mgl\cos\theta \tag{24}$$

Чтобы наглядно представить себе характер движения рассмотрим несколько предельных случаев.

А. Уравновешенный волчок. ($l = 0$).

В этом случае решение может быть получено совсем просто, поскольку момент внешних сил действующих на волчок равен нулю и момент количества движения волчка сохраняется. Пусть начальные угловые скорости были такие, что момент количества движения занял какое-то определённое положение в пространстве $\mathbf{M}$. Направим ось z вдоль направления $\mathbf{M}$ и пусть ось волчка составляет с осью z угол θ_0 Проведём через ось волчка и направление углового момента плоскость и выберем систему главных осей так, что ось η - т.е ось y подвижной системы координат, будет перпендикулярна этой плоскости. Поскольку полный момент $\mathbf{M}$ находится в плоскости, то его составвляющая M_2 , а значит и составляющая угловой скорости Ω_2 равны нулю. Из рисунка **??**видно, что

$$M_3 = M_z\cos\theta_0 = C\Omega_3$$

$$M_1 = M_z\sin\theta_0 = A\omega_1 = A\Omega_z\sin\theta_0$$

Поэтому угловая скорость вращения плоскости вокруг оси z - Ω_z есть

$$\Omega_z = M_z/A = M/A$$

Эту скорость называют скоростью прецессии и мы видим, что в отсутствии внешних сил движение волчка сводится к вращению вокруг собственной оси и прецессии вокруг заданной оси в пространстве.

Эти же ответы можно получить и непосредственно из выражений для энергии **??**. Для этого заметим, что при $M_3 = M_z\cos\theta_0$ сила $-\partial U_{eff}/\partial\theta$ исчезает при $\theta = \theta_0$

$$\frac{\partial U}{\partial\theta} = \frac{(M_z - M_3\cos\theta)(M_3 - M_z\cos\theta)}{A\sin^3\theta} - mgl\sin\theta \tag{25}$$

Поэтому для свободного волчка ($l = 0$) решением уравнений движения будет $\theta = \theta_0$. При этом из уравнений **??**, **??**

$$\dot{\phi} = \frac{M_z - M_3\cos\theta}{A\sin^2\theta} \tag{26}$$

и после подстановки постоянных M_z и M_3 $\dot{\phi} = M_z/A$, т.е та же самая скорость прецессии.

В, Спящий волчок.

Запустим волчок так, что $\theta = 0$. Тем самым $M_z = M_3 = C\Omega_3$. При этом даже в присутствии поля тяжести это положение волчка будет подожением равновесия;

$\sin\theta_0 = \sin 0 = 0$. Для того, чтобы определить, когда это положение равновесия будет устойчивым, разложим выражение для эффективной потенциальной энергии U по малыи углам θ

$$U = \frac{(M_z - M_3\cos\theta)^2}{2A\sin^2\theta} + mgl\cos\theta \approx \frac{M^2(\theta^2/2)^2}{2A\theta^2} - mgl\theta^2/2 = \frac{\theta^2}{2}\left(\frac{M^2}{4A} - mgl\right)$$

Поэтому при $\Omega_3^2 C^2/4A > mgl$ положение равновесия будет устойчивым, а в противном случае - неустойчивым. Это объясняет поведение детской юлы: при больших скоростях вращения она стоит вертикально и лишь слегка подрагивает. Но по мере того, как трение замедляет вращение, положение равновесия становится неустойчивым и волчок падает.

C. Быстрый волчок.

Теперь запустим волчок так, чтобы в начальный момент времени $\theta = \theta_0$ $\dot\theta = 0$. и пусть $l \neq 0$, т.е. на волчок действует момент внешних сил. Скорость вращения волчка будем считать большой - $C\Omega_3^2/2 >> mgl$. Поскольку момент внешних сил мал, то в нулевом приближении ось волчка будет неподвижной и момент количества движения будет направлен вдоль оси волчка. Тем самым $M_z = M_3\cos\theta_0$ При этом частота колебании вокруг этого положения равновесия определяется как и в случае "спящего"волчка разложением потенциальной энергии вблизи $\theta_0 : \theta = \theta_0 + \chi$

$$U = \frac{M_3^2(\cos\theta_0 - \cos\theta)^2}{2A\sin^2\theta_0} + mgl\cos\theta \approx \frac{M_3^2\chi^2}{2A} - mgl\chi\sin_t heta_0$$

Отсюда частота колебаний относительно положения равновесия $\Omega = C\Omega_3/A$ а сдвиг положения равновесия относительно угла θ_0 есть

$$\chi_0 = \frac{mgl\sin\theta_0 A}{M_3^2}$$

Тем самым x_0 есть амплитуда колебаний или , как говорят, нутаций оси волчка относительно направления момента количества движения. Найдем теперь скорость вращения (прецессии) относительно оси z. Из

$$\dot\phi = \frac{M_z - M_3\cos\theta}{A\sin^2\theta}$$

разложением по χ получим для средней скорости вращения

$$<\dot\phi> = \frac{M_3^2\sin\theta_0 <\chi>}{A\sin^2\theta_0} = \frac{mgl}{M_3}$$

Таким образом быстрый волчок крутится вокруг своей оси со скоростью Ω_3, обращается вокруг направления момента количества движения с частотой нутации $\Omega = C\Omega_3/A$ и наконец направление момента количества движения прецессирует вокруг оси z со скоростью $\frac{mgl}{M_3}$.

0.1.6 Принцип наименьшего действия .

Вариационное исчисление

Задачей вариационного исчисления является отыскание экстремума функционала, т.е. грубо говоря отыскание такой формы кривой, при которой значение интеграла, определённого вдоль кривой, достигает своего наименьшего или наибольшего значения. Точнее функционалом называется отображение пространства кривых (площадей) на числовую ось. Дифференциал функционала иначе называется вариацией.

В качестве типичного примера задачи вариационного исчисления рассмотрим задачу о нахождении кратчайшего расстояния между двумя точками

$$\Phi(\gamma) = \int \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} dx$$

Предположим, что мы нашли эту кривую: $y = y(x)$. Чуть изменим ее форму и вычислим интеграл вдоль кривой $y = y(x) + \delta y(x$. Изменение интеграла будет

$$\delta\Phi = \int \frac{\delta \frac{dy}{dx})}{\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}} dx = \int \frac{\frac{d\delta y}{dx})}{\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}} dx$$

Для того, чтобы избавиться от производной нашей вариации проинтегрируем по частям

$$\delta\Phi = \frac{\delta y}{\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}}|_a^b + \int_a^b \frac{\delta y \frac{dy}{dx})}{(1 + (\frac{dy}{dx})^2)^{3/2}} dx$$

На концах отрезка интегрирования δy тождественно равно нулю, поскольку крайние точки кривой по определению закреплены. Поэтому внеинтегральный член исчезает и остается только выражение под интегралом. Если оно не равно тождественно нулю, то подбирая δy мы сможем уменьшить или увеличить значение интеграла, что противоречит исходному предположению. Поэтому для того чтобы интеграл имел экстремум выражение при δy (вариационная производная) должно быть равным нулю во всех точках кривой. В нащем случае это означает, что $dy/dx = 0$, т.е. искомая кривая является прямой.

Принцип наименьшего действия Гамильтона.

Действием S называется функционал на пространстве кривых т.е. интеграл взятый от лагранжиана вдоль траекторий, начинающихся в момент t_0 в точке q_0 и идущих в точку t, q.

$$S = \int\limits_{t_0}^{t} L\left(x, \dot{x}, t\right)\, dt$$

Из условия экстремума S следует, что этот экстремум достигается на кривых, которые отвечают классическим траекториям, т.е. удовлетворяют уравнения Лагранжа

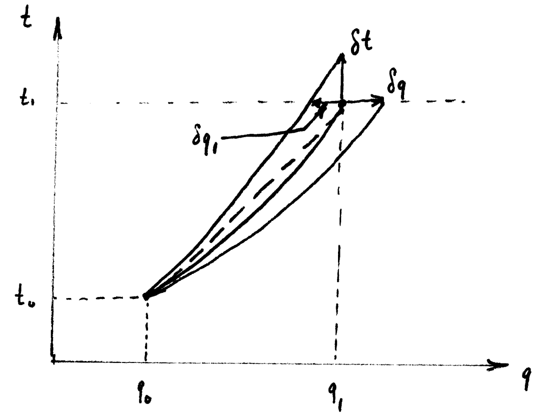

Рис. 4: Траектории, на которых вычисляется действие

второго рода . Доказательство : пусть $\gamma(t)$ бесконечно малое отклонение кривой от ее экстремального положения

$$\delta S = \int\limits_{t_0}^{t} L\left(x+\gamma, \dot{x}+\dot{\gamma}, t\right)\, dt - \int\limits_{t_0}^{t} L\left(x, \dot{x}, t\right)\, dt = \int\limits_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial L}{\partial x}\dot{\gamma} + \frac{L}{\partial \dot{x}}\dot{\gamma}\right)\, dt$$

$$\delta S = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial L}{\partial x}\gamma\, dt + \dot{\gamma}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Bigg|_{t_0}^{t_1} - \int\limits_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\gamma\, dt$$

$$\delta S = \int\limits_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) h\, dt$$

Внеинтегральный член равен 0 , т.к. $\gamma(t_1) = \gamma(t_0) = 0$.

Если интеграл $\int\limits_{t_0}^{t} f\left(t\right)\gamma\left(t\right)\, dt = 0$ для $\forall$ непрерывных функции $\gamma\left(t\right)$, то $f\left(t\right) \equiv 0$.

Доказательство легко делается от противного: если функция $f(t)$ например положительна в окрестности точки t, то в качестве γ можно взять функцию, которая также положительна в окрестности t и равна 0 во всех остальных точках. При таком выборе интеграл очевидно будет больше нуля, что противоречит исходному условию.

Действие как функция координат и времени .

Отличие этой задачи от предыдущей – один конец нашей кривой не закреплен, а δS– отвечает разности значений S на экстремальных траекториях, идущих из точки q_0, t_0 в точки q_1, t_1 и $q_1 + \delta q, t_1 + \delta t$. Вычислим вариацию действия при такой постановке задачи:

$$\delta S = \int\limits_{t_0}^{t+\delta t} L\left(x, \dot{x}, t\right)\, dt = L\delta t + \int\limits_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial x} x\right)\, dt$$

Опять интегрируем второй член по частям

$$\delta S = \left(L\delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x\right)|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial L}{\partial x}\right)\delta x dt$$

После этого член под интегралом исчезает, поскольку мы рассматриваем изменение действия только на экстремальных траекториях. На нижнем конце наша кривая закреплена и поэтому δq_0 и δt равны нулю. Поэтому при сдвиге конечной точки вдоль линии с постоянным временем

$$\delta S = p\delta x$$

При сдвиге вдоль линии с постоянной координатой ситуация чуть более сложная, поскольку теперь экстремальная кривая пересекает линию t_1=const в точке сдвинутой на $\delta x = -\dot{x}\delta t$ от начальной. Поэтому.

$$\delta S = -\left(p^i q^i - L\right)\delta t = -E\delta t \Rightarrow \frac{\delta S}{\delta t} = -E.$$

где E это энергия системы. Тем самым импульс и энергия системы непосредственно определяются действием.

Из данного вывода вновь следует, что законы сохранения энергии и импульса являются следствием однородности времени или пространства. Действительно при параллельном переносе начальной и конечной точек в однородном пространстве действие не изменится $\delta S = 0$. С другой стороны это изменение есть $(p_1 - p_0)\delta x$, откуда и следует закон сохранения импульса.

0.1.7 ПРИЛОЖЕНИЕ Уравнения Эйлера.

В этом разделе мы выведем явные уравнения для скорости изменения вектора Ω. Пусть начала координат подвижной и неподвижной систем совпадают, а $\vec{m}$ и $\vec{M}$– моменты импульса в неподвижной и вращающейся системах .

$$\dot{\vec{m}} = \dot{\left(B\vec{M}\right)} = \dot{B}\vec{M} + B\dot{\vec{M}} = k$$

где k момент сил в неподвижной системе координат. Он связан с моментом сил K во вращающейся системе обычным преобразованием к новой системе координат $k = BK$.

$$\dot{\vec{m}} = \left(\dot{B}B^{-1}B\vec{M}\right) + B\dot{\vec{M}} = A\vec{m} + B\dot{\vec{M}}M$$

$$K = \left(\left[\vec{\Omega}\times\, \vec{M}\right] + \dot{\vec{M}}\right)$$

В системе главных осей уравнения будут иметь вид :

$$K_3 = C\dot{\Omega}_3 + \Omega_1\Omega_2\left(B - A\right) \qquad .$$

Это динамические уравнения Эйлера.

Но даже решив эти уравнения мы ещё не сможем определить движение тела, поскольку не существует таких координат, производными которых являются эти угловые скорости. Поэтому Ω_i надо выразить через производные от углов Эйлера при помощи кинематических уравнений Эйлера. Совокупность этих уравнений позволяет найти движение твёрдого тела.