

КУРЧАТОВСКАЯ ОЛИМПИАДА — 2004, 10 класс

1. Найдите сумму  $1 + 2x + 4x^2 + 6x^3 + 8x^4 + \dots$ , где  $|x| < 1$ .

2. Решите уравнение

$$\cos 2x = \frac{4}{\pi^2} \arcsin^2\left(\frac{3\pi}{2x}\right) - 2 \sin x \left(3 - \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{3\pi}{2x}\right)\right) + 6.$$

3. Периметр треугольника  $ABC$  равен 10, а  $\angle BAC = 60^\circ$ . Точки  $K$  и  $L$  — основания перпендикуляров, опущенных из вершины  $A$  на биссектрисы внешних углов  $B$  и  $C$ . Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника  $AKL$ .

4. Биллиард имеет форму правильного треугольника  $ABC$  со стороной 1 метр, в вершинах его находятся лузы. Шар начинает двигаться прямолинейно из середины стороны  $AB$ , трижды упруго отражается от стенок и попадает в лузу в вершине  $C$ . Какой путь пройден шаром?

*Примечание.* При упругом ударе шара о стенку угол падения равен углу отражения; радиус шара пренебрежимо мал по сравнению с размерами стола.

5. Шарик небольшого радиуса соскальзывает без начальной скорости с высоты  $H_0$ , двигаясь без трения по желобу, установленному в вертикальной плоскости на тележке, которая может двигаться по горизонтальному полу (см. рисунок). Горизонтальный участок желоба плавно переходит в полуокружность радиуса  $R$ . Найти: 1) максимальную высоту  $H$ , которую достигает шарик после отрыва от желоба; 2) скорость тележки в момент отрыва. Считать суммарную массу тележки и желоба равной массе шарика. Массами колес тележки и трением ее о пол пренебречь. Задачу решить для случая  $H_0 = 55R/32$ .

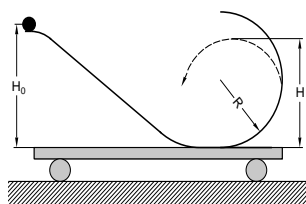


Рис. 1

6.  $\nu$  молей воздуха при температуре  $T_0$  находятся в сосуде с вертикальными стенками под тяжелым подвижным поршнем массы  $M$ . Поршень соединен пружиной жесткости  $k$  с потолком так, что пружина осталась недеформированной. Найти теплоемкость системы.

Теплоемкостями сосуда и поршня пренебречь. Трение поршня со стенками сосуда не учитывать.

7. Сфера радиуса  $R$  однородно заряжена с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Горизонтальной плоскостью, проходящей на расстоянии  $a < R$  от верхней точки сферы, отрезают верхний сферический сегмент. Если место среза полностью закрыть равномерно заряженным кругом с некоторой поверхностной плотностью заряда  $\sigma'$  и массой  $M$ , то этот круг будет свободно висеть в поле тяжести Земли. На сколько нужно изменить поверхностную плотность заряда круга, чтобы этот же круг свободно висел над нижним сферическим сегментом на месте среза верхней части сферы, осуществляемого плоскостью, проходящей на расстоянии  $a$  от нижней точки сферы?