

КУРЧАТОВСКАЯ ОЛИМПИАДА — 2004, 11 класс

1. Задана последовательность положительных чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, таких, что $a_{n+1}^2 + a_n^2 = n^2$. Известно, что $a_1 = \sqrt{3959}/100$. Чему равен 150-й член последовательности?
2. При каких значениях параметра k уравнение

$$x^4 + \left(k + \frac{5}{3} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{10}}\right) x^3 + 2k^4 + 1 = 0$$

имеет ровно одно действительное решение?

3. Дан куб с ребром 1. Неплоская замкнутая ломаная без самопересечений и самоналожений имеет 12 звеньев. Все её вершины лежат внутри граней куба, причем 4 вершины – центры граней. Каждые два соседних звена обладают следующим свойством: они наклонены к грани, содержащей их общую вершину, под равными углами, а содержащая их плоскость перпендикулярна этой грани. Найдите длину этой ломаной.
4. В треугольнике ABC проведены: биссектриса угла BAC , средняя линия, параллельная стороне AC , и отрезок, соединяющий точки касания вписанной в $\triangle ABC$ окружности со сторонами AC и BC . Известно, что $\angle ABC > \angle BCA$. На сколько частей делят треугольник ABC три указанных отрезка? Ответ обоснуйте.
5. Горизонтальная платформа массы M прикреплена к вертикальной упругой пружине жесткости k и длиной l_0 (см. рис. 1). Платформа совершает вертикальные колебания относительно положения равновесия. В некоторый момент времени с высоты h относительно поверхности платформы в положении равновесия с нулевой начальной скоростью начинает падать шарик массы m ($m < M$). Известно, что при отскоке от колеблющейся платформы (при абсолютно упругом ударе) шарик каждый раз поднимается на первоначальную высоту h .
 - 1) Определить высоту h , при которой все столкновения происходят в положении равновесия платформы.
 - 2) Найти амплитуду колебаний платформы в этом случае и оценить число возможных решений в пределе пружины большой жесткости $k \gg mg/l_0$.

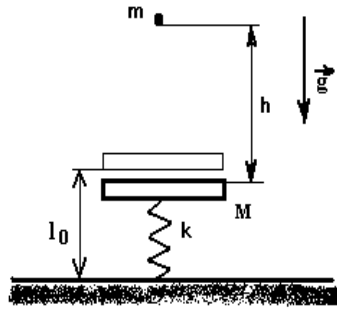


Рис. 1

6. В вертикальное однородное магнитное поле индукции \mathbf{B} внесен проводник длиной L и массой M и подвешен за концы двумя вертикальными легкими проводами длиной l каждый к непроводящей горизонтальной перекладине. Верхние концы проводов замкнуты на конденсатор емкости C (см. рис. 2).

- 1) Найти период малых колебаний проводника в перпендикулярном к его оси направлении.
- 2) Определить заряд конденсатора в момент прохождения проводника положения равновесия, если известен максимальный угол отклонения проводов от вертикали φ_0 .

Сопротивлением массивного проводника, проводов и всех подводящих проводников пренебречь.

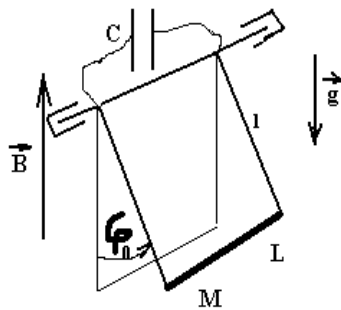


Рис. 2

7. Точечный источник света находится на главной оптической оси тонкой собирающей линзы на расстоянии a от нее. Фокусное расстояние линзы f . Между точечным источником света и линзой помещен аквариум с прозрачной жидкостью с показателем преломления n . Вертикальные боковые стенки аквариума расположены параллельно друг другу и перпендикулярно оптической оси. Линза дает действительное изображение источника, которое наблюдается на экране. Стенки аквариума начали раздвигать с постоянной относительной скоростью v_0 , поддерживая постоянный уровень жидкости.

Определить положение экрана и скорость его перемещения, необходимые для наблюдения изображения источника, в тот момент, когда расстояние между боковыми

стенками аквариума было равно d ($a > nf$, $d < a$).